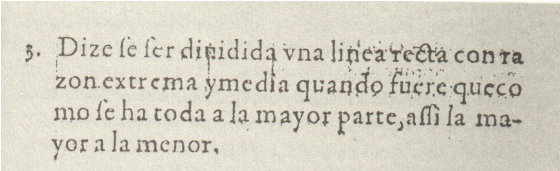


Définition du nombre d'or (10 points)

La plus ancienne définition, et construction géométrique, de la **section d'or** remonte au III^{ème} siècle avant JC et est due au mathématicien grec Euclide, dans son ouvrage « *Les Eléments* » :

Document 1



En 1576, la traduction du cosmographe de Philippe II la présente de la manière suivante : « *se dit divisée une ligne droite en extrême et moyenne raison quand le tout est à la partie, ce que la grande est à la petite.* »

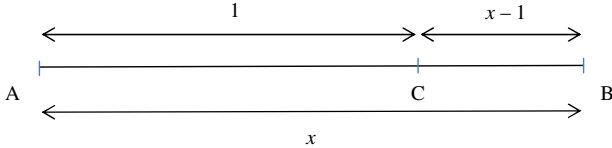
Traduit en langage moderne, cela donne :

« *Un segment est dit divisé en moyenne et extrême raison quand la longueur totale du segment est à la grande partie, ce que cette dernière est à la petite partie.* »

Cette extrême et moyenne raison est en réalité le nombre qu'on appellera plus tard « **nombre d'or** » ou « **divine proportion** ».

Soit un segment [AB] que l'on coupe en deux parties [AC] et [CB] (voir le schéma ci-dessous). La partition ainsi opérée sera en extrême et moyenne raison, autrement dit, conforme à la divine proportion, quand le quotient de la longueur totale « *x* » du segment sur la grande partie « *1* » est égal au quotient de la grande partie « *1* » sur celle de la petite partie « *x - 1* ». Autrement dit, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

<i>x</i>	1
1	<i>x - 1</i>



On a donc $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

1. Montrer que si *x* est solution de $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, alors *x* est solution de l'équation suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.
2. Montrer que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Φ se lit « phi ») est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Dans la suite, on admettra que Φ est le nombre d'or.

3.

- a. En déduire que $\Phi^2 = \Phi + 1$.
- b. Déduire de la question précédente que $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

Document 2

LES DÉCIMALES DE Φ

Pour ceux qui aiment la précision, voici les mille premières décimales du nombre d'or :

1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526
046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693
179318006076672635443338908659593958290563832266131992829026788067520
876689250171169620703222104321626954862629631361443814975870122034080
588795445474924618569536486444924104432077134494704956584678850987433
944221254487706647809158846074998871240076521705751797883416625624940
75890697040002812104276217711177805315317141011704666599146697987317
613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347
845878228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303724
292675263116533924731671112115881863851331620384005222165791286675294
654906811317159934323597349498509040947621322298101726107059611645629
90981629055208524790352406020172799747175342777592778625619432082750
513121815628551222480939471234145170223735805772786160086883829523045
926478780178899219902707769038953219681986151437803149974110692608867
4296226757560523172777520353613936...

- c. A l'aide du document 2 ci-dessus, déduire de la question précédente une valeur approchée de $\frac{1}{\Phi}$ à 10^{-6} près.
4. Déduire de la question 3a. que $\Phi^3 = 2\Phi + 1$.
5. Déduire de la question précédente que $\Phi^4 = 3\Phi + 2$.