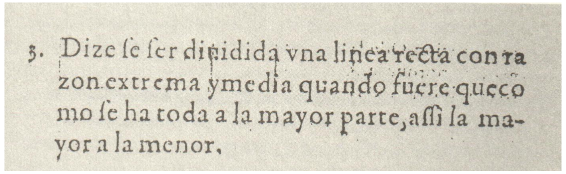
Nom Prénom Classe

Devoir de recherche sur le nombre d'or **Partie 1** à rendre le ……………………………

<u>Définition du nombre d'or</u> (10 points)

La plus ancienne définition, et construction géométrique, de la **section d'or** remonte au IIIème siècle avant JC et est dûe au mathématicien grec Euclide, dans son ouvrage « *Les Eléments* » :

Document 1


5. Dize ſe ſer diuidida vna linea recta con ra
zon extrema y media quando fuere que co
mo ſe ha toda a la mayor parte, aſſi la ma-
yor a la menor.

En 1576, la traduction du cosmographe de Philippe II la présente de la manière suivante : « *se dit divisée une ligne droite en extrême et moyenne raison quand le tout est à la partie, ce que la grande est à la petite.* »

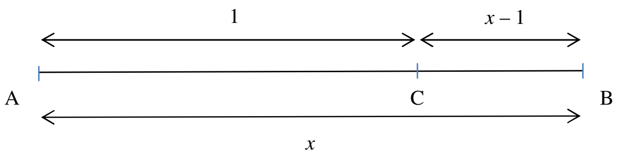
Traduit en langage moderne, cela donne :

« *Un segment est dit divisé en moyenne et extrême raison quand la longueur totale du segment est à la grande partie, ce que cette dernière est à la petite partie.* »

Cette extrême et moyenne raison est en réalité le nombre qu'on appellera plus tard « **nombre d'or** » ou **« divine proportion** ».

Soit un segment [AB] que l'on coupe en deux parties [AC] et [CB] (voir le schéma ci-dessous). La partition ainsi opérée sera en extrême et moyenne raison, autrement dit, conforme à la divine proportion, quand le quotient de la longueur totale « x » du segment sur la grande partie « 1 » est égal au quotient de la grande partie « 1 » sur celle de la petite partie « $x - 1$ ». Autrement dit, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

x	1
1	$x - 1$



On a donc $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

1. Montrer que si x est solution de $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$, alors x est solution de l'équation suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.

2. Montrer que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Φ se lit « phi ») est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

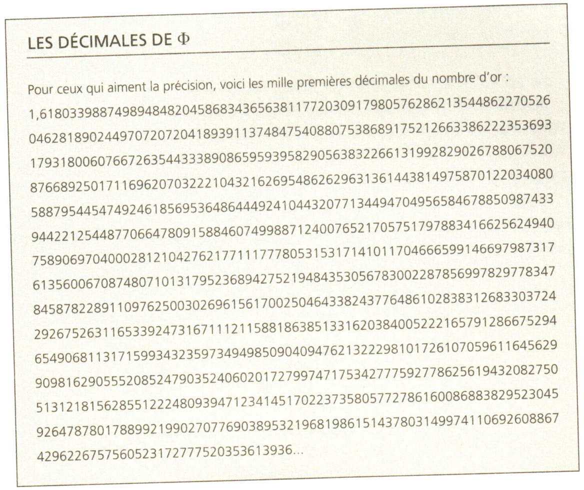
Dans la suite, on admettra que Φ est le nombre d'or.

3.

   a. En déduire que $\Phi^2 = \Phi + 1$.

   b. Déduire de la question précédente que $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

Document 2


LES DÉCIMALES DE Φ

Pour ceux qui aiment la précision, voici les mille premières décimales du nombre d'or :
1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526
046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693

   c. A l'aide du document 2 ci-dessus, déduire de la question précédente une valeur approchée de $\frac{1}{\Phi}$ à 10^{-6} près.

4. Déduire de la question **3a.** que $\Phi^3 = 2\Phi + 1$.

5. Déduire de la question précédente que $\Phi^4 = 3\Phi + 2$.